

МИНИСТЕРСТВО НА ОБРАЗОВАНИЕТО И НАУКАТА
ЦЕНТРАЛНА КОМИСИЯ ЗА ОРГАНИЗИРАНЕ НА ОЛИМПИАДАТА
ПО АСТРОНОМИЯ

X НАЦИОНАЛНА ОЛИМПИАДА ПО АСТРОНОМИЯ

<http://astro-olymp.org>

IV кръг
12 юли 2007 г.

Старша възраст

Задача 1. През 2027 г. олимпийската астрошкола се провежда в орбиталната станция „Морулей”, намираща се на екваториална орбита на височина 2000 km над земната повърхност. С помощта на радиотелескоп с предавател астрономът Росита Кокотанекова излъчва към станцията своята лекция. Лекцията има времетраене 40 min.

А) Какъв е минималният диаметър, който радиотелескопът трябва да има, така че олимпийците да могат да го видят от станцията?

Б) Ще има ли достатъчно време Росита да изнесе своята лекция, ако считате, че олимпийците могат да приемат радиоемисията, само когато станцията им е над хоризонта за радиотелескопа, разположен на екватора. Станцията „Морулей” изгрява от запад и залязва на изток.

Рефракцията да не се отчита.

Справочни данни:

Маса на Земята – 6×10^{24} kg

Радиус на Земята – 6 378 km

Разделителната способност на човешкото око - $1'$

Решение:

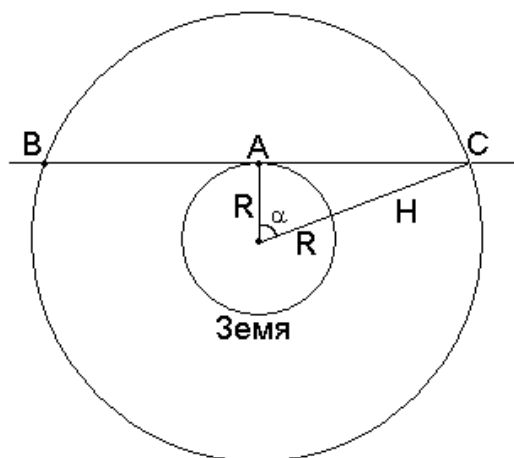
А) За да могат олимпийците дори само за миг да видят радиотелескопа, то той трябва да има такъв линеен диаметър, че когато разстоянието между станцията и него е най-малко, видимият му ъглов размер да е по-голям от минималния ъгъл, характеризиращ разделителната способност на окото $\theta = 1'$. Това най-малко разстояние е равно на височината на „Морулей” над земната повърхност H . Търсеният минимален размер на телескопа е:

$$d_{\min} = \theta [\text{rad}] \cdot H \approx 580 \text{ m} .$$

Б) Радиусът на орбитата на „Морулей” е: $a = R + H$. Ако T е орбиталният ѝ период, то съгласно III закон на Кеплер:

$$\frac{a^3}{T^2} = \frac{\gamma M_3}{4\pi^2}$$

където M_3 е масата на Земята, а γ – гравитационната константа.



орбита на спътника

Оттук можем да намерим:

$$T = 2\pi \sqrt{\frac{(R+H)^3}{\gamma M_{\text{З}}}} \approx 2^{\text{h}} 07^{\text{min}}$$

Това е сидеричният период на станцията. Ако T_{syn} е периодът ѝ относно радиотелескопа на екватора, то в сила е съотношението

$$\frac{1}{T_{\text{syn}}} = \frac{1}{T} - \frac{1}{T_{\text{З}}},$$

където $T_{\text{З}}$ е звездното денонощие.

Знакът между $\frac{1}{T}$ и $\frac{1}{T_{\text{З}}}$ е минус, защото е казано, че „Морудей“ изгрява от запад и залязва на изток, т. е. обикаля около Земята по посока на денонощното ѝ въртене. Пресмятаме T_{syn} по формулата:

$$T_{\text{syn}} = \frac{T \cdot T_{\text{З}}}{T_{\text{З}} - T} \approx 2^{\text{h}} 20^{\text{min}}$$

Орбиталната станция „Морудей“ ще е над хоризонта за Росита само в участъка BC на траекторията си. За да го премине, тя се завърта на ъгъл 2α . От чертежа се вижда, че $\cos \alpha = \frac{R}{R+H} \Rightarrow \alpha \approx 40,5^\circ$. Следователно „Морудей“ ще е над хоризонта в интервал от време $\Delta t = \frac{2\alpha}{360^\circ} \cdot T_{\text{syn}} \approx 31 \text{ min}$. От този резултат следва, че Росита няма да има време за да завърши своята лекция.

Задача 2. Професорът по астрофизика Езджан Софу изследва звездата ЕС-77. Тя е двойна система с орбитален период 21 години и максимално ъглово отдалечаване на компонентите $0,58''$. Видимите звездни величини на компонентите са $1,7^{\text{m}}$ и $5,8^{\text{m}}$. Паралаксът на системата е $0.063''$.

Разсеяният професор си спомня, че едната от звездите е съвсем подобна на Слънцето, но информацията за другата е загубил заедно с фенерчето си.

Каква би могла да е масата на другата звезда?

Отговорете само качествено какво може да се каже за другите астрофизични характеристики на звездата.

Решение: Означаваме с p паралакса на двойната звезда. Разстоянието до нея е: $r = 1/p'' \approx 15.9 \text{ pc}$. Знаейки разстоянието и видимите звездни величини на компонентите в двойната система, можем да преценим коя от тях е подобна на Слънцето. Известно е, че абсолютната звездна величина на Слънцето е $m_{\text{С}} = 4.8^{\text{m}}$. Такъв блясък то би имало, ако го гледаме от разстояние 10 pc . В нашия случай обаче $r > 10 \text{ pc}$ и звезда, подобна на Слънцето, би трябвало да

има видим блясък по-слаб от 4.8^m . Следователно слънцеподобната звезда трябва да е компонентата с блясък $m_2 = 5.8^m$. Абсолютната звездна величина на звездата е: $M_2 = m + 5 - 5 \lg r \approx 4.8^m$, т.е. същата като тази на Слънцето. Можем да предположим, че масата и светимостта ѝ също са равни на слънчевите. Означаваме ги съответно с M_S и L_S .

За да оценим масите на двете компоненти, най-просто е да предположим, че те се движат по кръгови орбити около центъра на масите. Ако разглеждаме първата звезда като неподвижна, то относителната орбита на втората звезда около първата също ще бъде кръгова. Нека линейния радиус на тази относителна орбита означим с a . Можем да го намерим от максималното видимо ъглово отдалечаване на звездите α_{max} : $a = r \cdot \alpha_{max}[\text{rad}] = 9,2 \text{ AU}$. (Друг начин: Радиусът a е толкова пъти по-голям от радиуса на земната орбита 1 AU, колкото ъгловото отдалечаване на звездите α_{max} е по-голямо от паралакса на системата p , изразени в дъгови секунди: $a [\text{AU}] = \alpha_{max}'' / p'' = 9,2 \text{ AU}$.)

Означаваме с M масата на онази звезда, която не е като Слънцето. Ако $T = 21$ години е орбиталният период на звездите, то:

$$\frac{a^3}{T^2} = \frac{\gamma(M + M_S)}{4\pi^2}$$

Ако a е в AU, T е в години, а M е в единици M_S , то: $a^3/T^2 = M + 1$. Оттук определяме $M = a^3/T^2 - 1 \approx 0.8M_S$.

Разстоянието до двете звезди е еднакво, т.е. отношението на осветеностите, които те създават, е равно на отношението на светимостите им. Означаваме светимостите с L_1 и L_2 , където $L_2 = L_S$. Ако $m_1 = 1.7^m$, то:

$$\frac{L_1}{L_2} = 2.512^{m_2 - m_1}$$

$$L_1 = 43L_2 = 43L_S$$

Звездата има значително по-висока светимост от Слънцето.

Да разгледаме възможните варианти за характеристиките на компонентата, която не е подобна на Слънцето. Единият е тя да лежи на главната последователност върху диаграмата на Херцшпрунг-Ръсел. На пръв поглед това е невъзможно, защото след като масата ѝ е $0.8 M_S$, то светимостта ѝ трябва да е близка до L_S . Но може видимата относителна орбита на едната звезда около другата да е някаква проекция на истинската орбита. Истинската орбита на едната звезда около другата може да е елипса с голяма полуос, по-голяма от полученото от нас линейно разстояние a . Тогава масата на въпросната компонента може да превишава M_S . Тя би могла да бъде звезда от главната последователност, по-масивна, по-гореща и по-мощно излъчваща от Слънцето.

При по-голяма маса, възможно е също разглежданата компонента да не лежи на главната последователност, а вече да е преминала в областта на гигантите. В такъв случай тя би трябвало да е по-хладна от подобната на Слънцето звезда. По-голямата ѝ светимост би се дължала на значително по-

големите ѝ размери. Понеже двете звезди принадлежат на една двойна система, те трябва да са се формирали заедно и да са приблизително на една и съща възраст. Еволюцията на въпросната компонента обаче трябва да е протекла доста по-бързо. Това предполага, че масата ѝ трябва да превишава M_S в достатъчно голяма степен. Следователно и тук е възможна ситуацията от предния вариант, а именно истинската дължина на голямата полуос на орбитата да е по-голяма от наблюдаваната проекция и оттам да се получи по-голяма стойност за масата на неизвестната звезда.

Задача 3. Галактика има радиус 15 крс и значително по-малка дебелина. Масата ѝ е 10^{11} слънчеви маси и е равномерно разпределена в целия ѝ обем. Две звезди се движат по кръгови орбити около центъра на галактиката в едно и също направление. Радиусите на орбитите им са 5 крс и 10 крс. Намерете синодичния период на първата звезда спрямо втората.

Решение: На всяка от двете звезди влияние оказва само онази част от галактиката, която се намира в област около галактичния център с радиус по-малък от радиуса на орбитата ѝ. За двете звезди означаваме орбиталните радиуси с $r_1 = 5$ крс и $r_2 = 10$ крс. Понеже масата е равномерно разпределена в цялата галактика, то можем да дефинираме плътност на галактиката $\rho = \frac{M}{V}$, където $M = 10^{11} M_S$ (слънчеви маси) е масата ѝ, а V е обемът ѝ.

Означаваме с r радиуса на галактиката, а с h дебелината ѝ. Понеже $h \ll r$, то ние можем да я разглеждаме като силно сплесната, следователно $V \sim h \cdot r^2$. Оттук следва, че обемите галактично вещество, оказващи влияние на двете звезди са $V_1 \sim h \cdot r_1^2$ и $V_2 \sim h \cdot r_2^2$. Следователно $M_1 \sim \rho h r_1^2$ и $M_2 \sim \rho h r_2^2$, където M_1 и M_2 са съответните маси вещество, влияещи на двете звезди.

$$M_1 = \left(\frac{r_1}{r} \right)^2 \cdot M$$

$$M_2 = \left(\frac{r_2}{r} \right)^2 \cdot M$$

Съгласно III закон на Кеплер, ако T_1 и T_2 са орбиталните периоди на звездите, то:

$$\frac{r_1^3}{T_1^2} = \frac{\gamma M_1}{4\pi^2}$$

$$\frac{r_2^3}{T_2^2} = \frac{\gamma M_2}{4\pi^2}$$

Оттук получаваме:

$$T_1 = 2\pi \sqrt{\frac{r_1 r^2}{\gamma M}}$$

$$T_2 = 2\pi \sqrt{\frac{r_2 r^2}{\gamma M}}$$

$$T_1 \approx 315 \times 10^6 \text{ години}$$

$$T_2 \approx 440 \times 10^6 \text{ години}$$

Звездите обикалят в една и съща посока, следователно за търсения синодичен период е в сила:

$$\frac{1}{T_{syn}} = \frac{1}{T_1} - \frac{1}{T_2} \Rightarrow T_{syn} = \frac{T_1 T_2}{T_2 - T_1} \approx 1100 \cdot 10^6 \text{ год.}$$

Задача 4. Преброени са звездите, имащи собствено движение по ректасцензия, което е положително (по посока на нарастване на ректасцензията) и отрицателно (в обратна посока). Във всеки от случаите са използвани общо по 200 звезди, които се намират в области с ректасцензии, близки до определени кръгли стойности:

α	0 ^h	3 ^h	6 ^h	9 ^h	12 ^h	15 ^h	18 ^h	21 ^h
Положително	132	152	107	39	46	47	101	143
Отрицателно	68	48	93	161	154	153	99	57

Като се използват тези данни, да се определи ректасцензията на апекса на движението на Слънчевата система.

Решение: Звездите, както и Слънцето, се движат около центъра на нашата Галактика. Върху това общо движение са наложени други, до голяма степен случайно разпределени движения. Те са обусловени от гравитационното въздействие на локални нееднородности в концентрацията на останалите звезди и другото вещество в галактиката.

Апексът е точката от небесната сфера, към която се движи нашето Слънце. Противоположната на нея е точката на антиапекса. Собствено движение на една звезда в астрономията е прието да се нарича ъгловото отместване на звездата по небесната сфера относно положенията на други, по-далечни звезди, за една година. Следователно това е компонентата от движението на звездата, която е напречна, перпендикулярна на зрителния лъч от нас към нея. Наблюдаваните собствени движения на звездите се дължат не само на истинските им движения относно галактичния център, но и на движението на самото Слънце относно тези звезди. В областите около апекса и антиапекса наблюдаваните собствени движения на звездите не съдържат компонента, дължаща се на движението на Слънцето. Затова те са разпределени до голяма степен случайно по посока. По дадените ни данни, за да намерим ректасцензиите на апекса и антиапекса, трябва да открием областите, където броят на звездите, движещи се в отрицателна по

ректасцензия посока, се изравнява с броя на звездите с „положително” движение.

Построяваме графика, показваща разпределенията по ректасцензия на броя звезди с положително и отрицателно движение. Определяме точките, където двете криви се пресичат. По тези точки определяме ректасцензиите на апекса и антиапекса. Те са приблизително 6^h и 18^h .



Остава да решим коя от двете ректасцензии е именно на апекса и коя на антиапекса. Нека си спомним, че апексът на Слънчевата система е приблизително в областта на Херкулес и Лира. Това съответства на ректасцензия 18^h . Но дори да не знаем това, виждаме, че в положителната посока по ректасцензия от пресечната точка на двете графики около 18^h расте броят на звездите с положително собствено движение, а в отрицателната посока по ректасцензия от тази точка расте броят на звездите с отрицателно собствено движение. Т.е. наблюдава се видимо “разбягване на звездите от тази област в различните посоки, подобно на това как крайпътните дървета сякаш се раздалечават от точката, към която сме се устремили по шосето пред нас. Оттук можем да направим заключението, че около 18^h по ректасцензия трябва да е апексът на Слънчевата система. Антиапексът е около ректасцензия 6^h . Към тази област звездите сякаш се събират.